

N.º: Nome:

Curso: N.º de folhas suplementares entregues na Questão 1:

Este teste é composto por 5 (cinco) questões que devem ser respondidas em folhas separadas.
O formulário encontra-se no verso da folha da Questão 5.
Justifique todas as respostas de forma clara e concisa.

Questão 1

1. [35] Considere $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
 - (a) Desenvolva a função f em série de MacLaurin.
 - (b) Use a série obtida em (a) para mostrar que $f'(x) = -2x e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

N.º: Nome:

N.º de folhas suplementares entregues na Questão 2:

Questão 2

2. [40] Considere a função $f(x) = \ln(x + 4)$, com $x > -4$.
- (a) Escreva a fórmula de Taylor de ordem 3 da função f no ponto $c = -3$, com resto de Lagrange.
 - (b) Calcule um valor aproximado de $\ln(2)$ usando o polinómio de Taylor de ordem 3 de f no ponto $c = -3$ e mostre que o erro absoluto cometido nessa aproximação é inferior a $0,25$.

N.º: Nome:

N.º de folhas suplementares entregues na Questão 3:

Questão 3

3. [50] Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periódica de período 2π , definida no intervalo $[-\pi, \pi[$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi \leq x < 0, \\ \pi - x, & \text{se } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

- (a) Sabendo que a série de Fourier de f tem a forma

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi(2n-1)^2} \cos((2n-1)x) + b_n \sin(nx) \right],$$

calcule os coeficientes b_n , $n \in \mathbb{N}$.

- (b) Sendo S a função soma da série anterior, justifique que $S(0) = \frac{\pi}{2}$ e represente-a graficamente no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

- (c) Usando a série de Fourier obtida, prove que $\pi^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)^2}$.

N.º: Nome:

N.º de folhas suplementares entregues na Questão 4:

Questão 4

4. [60] Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \frac{3x^2}{1 - x^2 - y^2}$.

- (a) Determine o domínio, D , e a curva de nível 1, C_1 , da função f . Represente ou descreva ambos geometricamente.
- (b) Determine as derivadas parciais f'_x e f'_y .
- (c) Justifique que f é diferenciável no seu domínio e determine uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1, -3)$.
- (d) Determine os vetores unitários $\vec{v} = (v_1, v_2)$ tais que $D_{\vec{v}}f(1, 1) = 0$.

N.º: Nome:

N.º de folhas suplementares entregues na Questão 5:

Questão 5

5. [15] Considere uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ com raio de convergência $R > 0$. Mostre que a série é uniformemente convergente em cada intervalo da forma $[-b, b]$, com $0 < b < R$.

FORMULÁRIO

Algumas fórmulas de derivação

$(fg)' = f'g + fg'$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
$(kf)' = kf' \quad (k \in \mathbb{R})$	$(f^\alpha)' = \alpha f^{\alpha-1} f' \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
$(a^f)' = f' a^f \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+)$	$(\log_a f)' = \frac{f'}{f \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
$(\operatorname{sen} f)' = f' \cos f$	$(\operatorname{cos} f)' = -f' \operatorname{sen} f$
$(\operatorname{tg} f)' = f' \sec^2 f = \frac{f'}{\cos^2 f}$	$(\operatorname{cotg} f)' = -f' \operatorname{cosec}^2 f = -\frac{f'}{\operatorname{sen}^2 f}$
$(\operatorname{arcsen} f)' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$(\operatorname{arccos} f)' = -\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$(\operatorname{arctg} f)' = \frac{f'}{1+f^2}$	$(\operatorname{arccotg} f)' = -\frac{f'}{1+f^2}$

Fórmula de integração por partes

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

Alguns desenvolvimentos em série de MacLaurin

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad x \in]-1, 1[$
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{cos} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$